Réduction de Jordan par la dualité

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.
- 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$, avec $\alpha_k \geq 1, \lambda_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}$ où*

$$\forall k \in [\![1,p]\!], J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & (0) \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}) \text{ et } \varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$$

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 1$, il existe $\varphi \in E^*$, $x \in E$ tel que les espaces*
- $F = \mathrm{Vect}(x, \ldots, u^{q-1}(x))$
- $G = H^{\perp}$ *avec* $H = \mathrm{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \ldots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$

sont stables par u et $E = F \oplus G$.

Preuve du lemme : Comme $({}^t u)^k = {}^t(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme ${}^t u : E^* \to E^*$ est nilpotent d'indice q, donc il existe $\varphi \in E^*$ tel que la famille $(\varphi, {}^t u(\varphi), \ldots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ est libre.
Comme $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$ et $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $(x, u(x), \ldots, u^{q-1}(x))$ est libre.
Notons H et F les espaces engendrés et notons $G = H^{\perp}$.
F est clairement stable par u.
Montrons que G est stable par u :
Soit $y \in G$, montrons que $u(y) \in H^{\perp}$, or pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $({}^t u)^k(\varphi)(u(y)) = ({}^t u)^{k+1}(\varphi)(y) = 0$ car $y \in G$.
Montrons que $E = F \oplus G$
On a déjà $\dim G + \dim F = n - q + q = n = \dim E$.

Montrons à présent que $F \cap G = \{0\}$,
Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G, u^{q-1}(y) \in G$ car G est stable par u.
D'où $0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \underbrace{\varphi(u^{q-1}(x))}_{\neq 0}$ donc $\lambda_0 = 0$.

De même, en supposant $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ pour $0 \leq j \leq q-2$, on a $y = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$ et $0 = \varphi(u^{q-j-2}(y)) = \lambda_{j+1} \underbrace{\varphi(u^{q-1}(x))}_{\neq 0}$ donc $\lambda_{j+1} = 0$. D'où $E = F \oplus G$. □

Lemme 2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 1$,il existe une base $E = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ telle que chaque espace $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ sont stables par u et la matrice l'endomorphisme induit par u sur E_i est*

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K})$$

avec $q_i = \dim(E_i)$

Preuve du lemme : On procède par récurrence sur $n = \dim E$,
— Pour $n = 1$, on a $u = 0$ et le résultat est acquis.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat acquis pour les espaces vectoriels de dimension strictement inférieur à n, considérons F et G telle le lemme 1, on a en notant $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$,

$$\underset{\mathcal{B}_1}{\mathrm{Mat}}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

Si $q = n$, le résultat est acquis. Sinon, on complète cette base par une base $\mathcal{B}_G$ une base de G, la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_G$ est $A = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix}$ car G est stable par u.
Comme $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence $\leq q$, on applique l'hypothèse de récurrence pour obtenir une base idoine.

□

Passons à présent au cas trigonalisable,

Preuve du théorème : Pour $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, notons $N_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id})^{\alpha_k}$, on a par théorème de Cayley-Hamilton, $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$.
Chaque N_k est un espace stable de dimension α_k et u_{N_k} a pour unique valeur propre λ_k et $u_{N_k} - \lambda_k \mathrm{id}$ est nilpotente d'indice $\beta_k \leq \alpha_k$.
Donc d'après le lemme 2, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de N_k dans laquelle $\mathrm{Mat}(u_{N_k} - \lambda_k \mathrm{id})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ \varepsilon_{k,1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la réunion de ces bases, la matrice de u est de la forme indiquée. $\square$

Références

[1] Jean Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre Géométrie*. deboeck, 2019.